

Faites exercices 1, 2 et 3 ou exercices 1, 2 et 4

Exercice 1

Soit f une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} (\cos^2(x+y) - 1) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Est-ce que f admet une limite au point $(0, 0)$ suivant toutes les directions ?
2. Est-ce que la fonction f admet une limite au point $(0, 0)$?

Exercice 2

Soit f une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que les dérivées partielles de f existent aux points :
 - i) (a, b) avec $b \neq 0$
 - ii) $(a, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. Etudier la différentiabilité de f aux points :
 - i) (a, b) avec $b \neq 0$
 - ii) $(a, 0)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue aux points :
 - i) (a, b) tel que $b \neq 0$
 - ii) $(0, 0)$
5. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non continue au point $(a, 0)$ avec $a \neq 0$.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \exp(x) + \exp(-y) - 2$

1. Montrer que f définit une fonction implicite φ de classe C^2 au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Déterminer le développement limité de φ au voisinage de zéro à l'ordre 2.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$$

Ex 1 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^2}(\cos^2(x+y)-1) = -\frac{x^2}{y^2}\sin^2(x+y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \quad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$

1/ Rappel: f admet une limite au point $(0,0)$ suivant toutes les directions

si $\lim_{t \rightarrow 0} f(t(x,y) + (0,0)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(tx,ty)$ existe

f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant toutes les directions

si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(x,y) + (0,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t}$ existe

$f(tx,ty) = \frac{-t^2 x^2}{t^2 y^2} \sin^2(tx+ty) = -\frac{x^2}{y^2} \frac{\sin^2(t(x+y))}{(t(x+y))^2} \cdot (t(x+y))^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{x^2}{y^2} \times 1 \times 0 = 0$

donc f admet la limite 0 suivant toutes les directions en $(0,0)$

2/ Pour $y=x$ on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} \sin^2(2x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin^2(2x) = 0$

Pour $y=x^2$ on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^4} \sin^2(x+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2(x+x^2)}{(x+x^2)^2} \cdot \frac{(x+x^2)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin(x+x^2)}{x+x^2}\right)^2 \cdot (1+x)^2 = -1$

la limite dépend du chemin suivi par (x,y) donc la limite n'existe pas

Exercice $f(x,y) = y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $y \neq 0$; $f(x,y) = 0$; si $y = 0$

1/ Continuité sur $D = \{(a,b) ; b \neq 0\}$
 les fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} \frac{x}{y}$, $x \xrightarrow{f_2} \cos x$; $(u,y) \xrightarrow{f_3} y^2$ sont continues respectivement sur $D, \mathbb{R}, D$ alors $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est continue sur D

* Continuité en $(a,0)$; $a \in \mathbb{R}$

$\forall y \neq 0$ $|f(x,y)| = |y^2 \cos \frac{x}{y}| = y^2 |\cos \frac{x}{y}| \leq y^2$ ($|\cos x| \leq 1$)

On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} y^2 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$ donc f est continue en $(a,0)$

par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$

2/ i/ les fonctions $x \rightarrow f(x,y)$ et $y \rightarrow f(x,y)$ sont dérivables sur D car

la fonction $x \mapsto y^2$, $y \mapsto \frac{x}{y}$, $x \mapsto \frac{x}{y}$, $y \mapsto y^2$ sont dérivables sur D et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f admet les dérivées partielles au points (a,b) avec $b \neq 0$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \sin \frac{x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cos \frac{x}{y} - x \sin \frac{x}{y}$
 d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -b \sin \frac{a}{b}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b \cos \frac{a}{b} - a \sin \frac{a}{b}$

ii/ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a,0) - f(0,0)}{a-0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0-0}{a} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a,y) - f(a,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cos \frac{a}{y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cos \frac{a}{y} = 0 \quad \text{car } |y \cos \frac{a}{y}| \leq |y| \text{ et } \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$$

donc f admet des dérivées partielles au point $(a,0)$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0 \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0$$

3/ i/ Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D , car elles sont la somme, produit et la composée de fonctions continues sur D , à savoir : $(x,y) \rightarrow y$, $(x,y) \rightarrow \sin \frac{x}{y}$, $(x,y) \rightarrow \cos \frac{x}{y}$. donc f est différentiable sur D

ii/ Différentiabilité en $(a,0)$

Si f est différentiable en $(a,0)$ alors $df_{(a,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) \cdot y = 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

$$\text{de plus } |E(x,y)| = \frac{|f(x,y) - f(a,0) - df_{(a,0)}(x,y)|}{\|(x-a, y-0)\|} = \frac{|y^2 \cos \frac{x}{y}|}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} x-a = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ alors } \left| \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r} \right| = |r \sin^2 \theta| \leq r$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} E(x,y) = 0 \text{ donc } f \text{ est diff. en } (a,0)$$

4/ i/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la somme, produit et la composée de fonctions continues sur D , à savoir : $(x,y) \rightarrow x$, $(x,y) \rightarrow y$, $(x,y) \rightarrow \sin \frac{x}{y}$, $(x,y) \rightarrow \cos \frac{x}{y}$

ii/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

$$\text{On a } \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| 2y \cos \frac{x}{y} - x \sin \frac{x}{y} \right| \leq |2y \cos \frac{x}{y}| + |x \sin \frac{x}{y}| \leq 2|y| + |x|$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2|y| + |x|) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est cont. en } (0,0)$$

5/ Montrons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non continue en $(a,0)$; $a \neq 0$

$$\bullet \text{ On a } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} 2y \cos \frac{x}{y} = 0 \text{ car } |2y \cos \frac{x}{y}| = |2y| |\cos \frac{x}{y}| \leq 2|y| \text{ et } \lim_{(a,0)} 2|y| = 0$$

$\bullet$ Montrons que la fonction $g(x,y) = x \sin \frac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$.

Rappel : f admet une limite l en $(a,b) \Leftrightarrow \forall x_n = (x_n, y_n)$ c.v. vers (a,b)
 $f(x_n)$ c.v. vers l

Considérons la suite $(x_n, y_n) = (a, \frac{a}{\frac{\pi}{2} - n\pi})$ qui converge vers $(a,0)$ alors que

$$g(x_n, y_n) = a \sin\left(\frac{a}{\frac{a}{\frac{\pi}{2} - n\pi}}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ n'a pas de limite}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas cont. en $(a,0)$
 $a \neq 0$